

Apellido y Nombres:
 DNI: Padrón: Código Asignatura:
 Cursada. Cuatrimestre: Año: Profesor:
 Correo electrónico:

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Cuarta fecha. 27 de agosto de 2021.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Demostrar la convergencia de $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^3} dx$ y explicar en detalle un método para calcularla, usando variable compleja.

Ejercicio 2. Considerar la función

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ x + 2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

y la serie de Fourier de senos de f en $[0, 1]$. Se pide:

- i) obtener, si existen, todos los valores de α para los que función y serie coinciden en todo el intervalo $(0, 1)$,
- ii) analizar si para algún valor de α la serie converge uniformemente en $[0, 1]$.

Ejercicio 3. Describir un problema físico modelable mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 10 & t \geq 0 \\ u(\pi, t) = 15 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = h(x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

y resolverlo, introduciendo las hipótesis necesarias sobre h .

Ejercicio 4. Determinar si existe una función $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = \begin{cases} 1 - e^{-(\omega^2-4)} & \text{para } |\omega| \leq 2 \\ 0 & \text{para } |\omega| > 2 \end{cases}$$

y obtener $\int_0^{+\infty} u(x, t) \cos(\omega x) dx$ sabiendo que:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & 0 < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \geq 0 \\ u_x(0, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Estudiar para qué valores de s es válida la igualdad:

$$\mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f_n \right] (s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mathcal{L}[f_n](s)$$

donde $f_n(t) = t^n \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0$ y $H(t)$ es la función de Heaviside.

ANÁLISIS MATEMÁTICO III – PRIMER CUATRIMESTRE 2021
EXAMEN INTEGRADOR – CUARTA FECHA –27/08/2021
RESOLUCIÓN

1) Demostrar la convergencia de la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3} dx$ y explicar en detalle un método para calcularla, usando variable compleja.

Resolución: Para cada par de números reales ε y b tales que $0 < \varepsilon < 1 < b$:

$$\int_{\varepsilon}^b \frac{|\ln(x)|}{1+x^3} dx = \int_{\varepsilon}^1 \frac{|\ln(x)|}{1+x^3} dx + \int_1^b \frac{|\ln(x)|}{1+x^3} dx = \int_{\varepsilon}^1 \frac{-\ln(x)}{1+x^3} dx + \int_1^b \frac{\ln(x)}{1+x^3} dx$$

Ahora, por separado:

$$(a) \int_{\varepsilon}^1 \frac{-\ln(x)}{1+x^3} dx < \int_{\varepsilon}^1 [-\ln(x)] dx = [x - x \ln(x)]_{x=\varepsilon}^{x=1} = 1 - \varepsilon + \varepsilon \ln(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 1$$

$$(b) \int_1^b \frac{\ln(x)}{1+x^3} dx < \int_1^b \frac{x}{1+x^3} dx < \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} 1$$

Hemos probado que la integral converge absolutamente. Para su cálculo podemos utilizar la función $f(z) = \frac{\text{Log}(z)}{1+z^3}$, donde Log es el logaritmo principal, y - para cada par de reales ε y R tales que $0 < \varepsilon < 1 < R$ - el circuito simple positivo

$$\Gamma(\varepsilon, R) = I(\varepsilon, R) \cup C(R) \cup J(\varepsilon, R) \cup C(\varepsilon) \quad (1.1)$$

indicados en la figura, donde, para cada par de reales ε y R tales que $0 < \varepsilon < 1 < R$:

$$I(\varepsilon, R) = \{x \in \mathbb{R} : \varepsilon \leq x \leq R\}$$

$$C(R) = \{R e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}\}$$

$$J(\varepsilon, R)^{(-)} = \left\{ t e^{\frac{2\pi}{3}i} : \varepsilon \leq t \leq R \right\}$$

$$C(\varepsilon)^{(-)} = \{\varepsilon e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}\}$$

(ver figura a continuación).

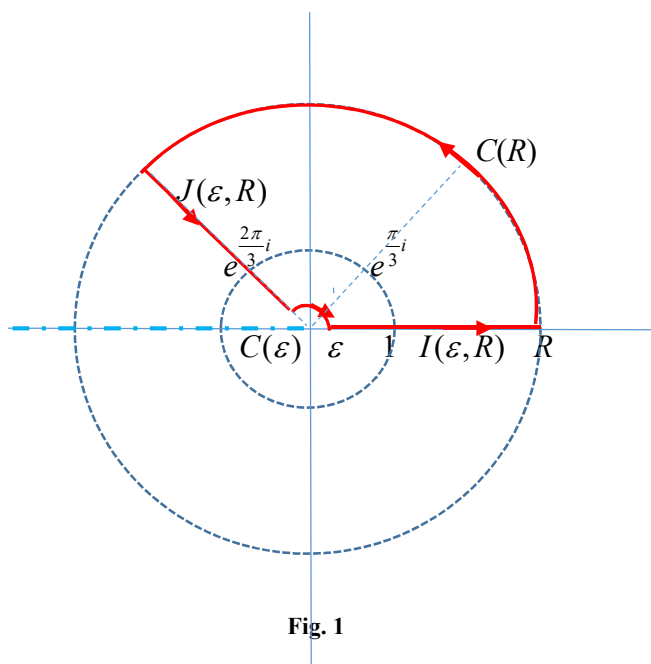


Fig. 1

En el Ejemplo 3 (página 33) de los Apuntes sobre integrales impropias hemos utilizado un circuito similar para el calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \quad (1.2)$$

La función f es holomorfa en $\mathcal{C} - \left(\{x \in \mathfrak{R} : x \leq 0\} \cup \left\{ e^{\frac{\pi}{3}i}, -1, e^{-\frac{\pi}{3}i} \right\} \right)$, pues sus singularidades son los puntos del corte del logaritmo principal y las tres raíces cúbicas de -1 . En el recinto interior de cada circuito (1.1), la única singularidad es $z_0 = e^{\frac{\pi}{3}i}$, que es un polo simple con residuo

$${}_z \underline{\text{Lim}}_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \text{Log}(z_0) {}_z \underline{\text{Lim}}_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{1 + z^3} = \text{Log}(z_0) \frac{1}{3z_0^2} = \frac{\pi}{3} i \frac{1}{3e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \frac{\pi e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{9} i$$

Por lo tanto, para cada uno de los circuitos (1.1) tenemos:

$$\oint_{\Gamma(\varepsilon, R)} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_0) = -\frac{2\pi^2 e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{9} \quad (1.3)$$

Es decir:

$$\int_{I(\varepsilon, R)} f(z) dz + \int_{C(R)} f(z) dz + \int_{J(\varepsilon, R)} f(z) dz + \int_{C(\varepsilon)} f(z) dz = -\frac{2\pi^2 e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{9} \quad (1.4)$$

Analicemos el comportamiento de las integrales del primer miembro cuando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ y $R \longrightarrow +\infty$ (el segundo ni se mueve...):

(a) $\int_{I(\varepsilon, R)} f(z) dz = \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln(x)}{1+x^3} dx \xrightarrow[\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}]{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3} dx$ (en los reales positivos, el logaritmo principal coincide con el logaritmo real)

(b) $\int_{C(R)} f(z) dz = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\text{Log}(Re^{i\theta})}{1+R^3 e^{3i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\ln(R) + i\theta}{1+R^3 e^{3i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta$: veamos que esta integral tiende a 0 cuando $R \longrightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\ln(R) + i\theta}{1+R^3 e^{3i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| &\leq \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left| \frac{\ln(R) + i\theta}{1+R^3 e^{3i\theta}} iRe^{i\theta} \right| d\theta = R \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left| \frac{\ln(R) + i\theta}{1+R^3 e^{3i\theta}} \right| d\theta \leq R \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{|\ln(R)| + \theta}{|1+R^3 e^{3i\theta}|} d\theta \leq \\ &\leq R \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{|\ln(R)| + \frac{2\pi}{3}}{|1+R^3 e^{3i\theta}|} d\theta = R[\ln(R) + \frac{2\pi}{3}] \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{|1+R^3 e^{3i\theta}|} \stackrel{R>1}{\leq} R[\ln(R) + \frac{2\pi}{3}] \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{R^3 - 1} = \\ &= \frac{R[\ln(R) + \frac{2\pi}{3}]}{R^3 - 1} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} d\theta = \frac{R[\ln(R) + \frac{2\pi}{3}]}{R^3 - 1} \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

(c) $\int_{J(\varepsilon, R)} f(z) dz = -\int_{\varepsilon}^R \frac{\text{Log}(te^{\frac{2\pi}{3}i})}{1+t^3 e^{2\pi i}} e^{\frac{2\pi}{3}i} dt = -e^{\frac{2\pi}{3}i} \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln(t) + i\frac{2\pi}{3}}{1+t^3} dt =$
 $= -e^{\frac{2\pi}{3}i} \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln(t)}{1+t^3} dt - \frac{2\pi e^{\frac{2\pi}{3}i}}{3} i \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{1+t^3} dt \xrightarrow[\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}]{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} -e^{\frac{2\pi}{3}i} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3} dt - \frac{2\pi e^{\frac{2\pi}{3}i}}{3} i \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt$

Esta última integral es exactamente (1.2), por lo tanto

$$\int_{J(\varepsilon, R)} f(z) dz \xrightarrow[\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}]{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} -e^{\frac{2\pi}{3}i} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3} dt - \frac{2\pi e^{\frac{2\pi}{3}i}}{3} i \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = -e^{\frac{2\pi}{3}i} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3} dt - \frac{4\pi^2 e^{\frac{2\pi}{3}i}}{9\sqrt{3}} i$$

(d) $\int_{C(\varepsilon)} f(z) dz = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\text{Log}(\varepsilon e^{i\theta})}{1+\varepsilon^3 e^{3i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = i\varepsilon \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\ln(\varepsilon) + i\theta}{1+\varepsilon^3 e^{3i\theta}} e^{i\theta} d\theta = i\varepsilon \ln(\varepsilon) \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{e^{i\theta}}{1+\varepsilon^3 e^{3i\theta}} d\theta +$
 $+ i\varepsilon \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{i\theta e^{i\theta}}{1+\varepsilon^3 e^{3i\theta}} d\theta$: veamos que esta integral tiende a 0 cuando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C(\varepsilon)} f(z) dz \right| &= \left| i\varepsilon \ln(\varepsilon) \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{e^{i\theta}}{1 + \varepsilon^3 e^{3i\theta}} d\theta + i\varepsilon \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{i\theta e^{i\theta}}{1 + \varepsilon^3 e^{3i\theta}} d\theta \right| \leq \varepsilon |\ln(\varepsilon)| \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{|1 + \varepsilon^3 e^{3i\theta}|} + \\
&+ \varepsilon \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\theta d\theta}{|1 + \varepsilon^3 e^{3i\theta}|} \stackrel{0 < \varepsilon < 1}{\leq} \varepsilon |\ln(\varepsilon)| \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{1 - \varepsilon^3} + \varepsilon \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\theta d\theta}{1 - \varepsilon^3} = \varepsilon |\ln(\varepsilon)| \left(\frac{1}{1 - \varepsilon^3} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} d\theta + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^3} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \theta d\theta \right) \\
&\longrightarrow 0^+ \text{ cuando } \varepsilon \longrightarrow 0^+ \text{ pues } \varepsilon \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon |\ln(\varepsilon)| = 0
\end{aligned}$$

En definitiva, tomando límites en (1.4) para $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ y $R \longrightarrow +\infty$ nos queda:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3} dx - e^{\frac{2\pi}{3}i} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3} dt - \frac{4\pi^2 e^{\frac{2\pi}{3}i}}{9\sqrt{3}} i = -\frac{2\pi^2 e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{9}$$

es decir

$$(1 - e^{\frac{2\pi}{3}i}) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3} dx = -\frac{2\pi^2 e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{9} + \frac{4\pi^2 e^{\frac{2\pi}{3}i}}{9\sqrt{3}} i = \frac{2\pi^2}{9} \left(\frac{2i}{\sqrt{3}} e^{\frac{2\pi}{3}i} - e^{-\frac{2\pi}{3}i} \right)$$

Antes de despejar la integral, multipliquemos el primer y tercer miembro por $e^{-\frac{\pi}{3}i}$:

$$(e^{-\frac{\pi}{3}i} - e^{\frac{\pi}{3}i}) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3} dx = \frac{2\pi^2}{9} \left(\frac{2i}{\sqrt{3}} e^{\frac{\pi}{3}i} - e^{-\pi i} \right)$$

Ahora bien: $e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $e^{-\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, por lo tanto

$$-i\sqrt{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3} dx = \frac{2\pi^2}{9} \left(\frac{2i}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right] + 1 \right) = \frac{2\pi^2}{9} \left(\frac{i}{\sqrt{3}} - 1 + 1 \right) = \frac{2\pi^2}{9\sqrt{3}} i$$

Finalmente, entonces:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3} dx = -\frac{2\pi^2}{27}$$

Observación: Hemos hecho toda la cuenta, lo que no se pide en el enunciado

2) Sea $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ x + 2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ y sea S la serie de Fourier

de senos de f en $[0,1]$. *i)* Obtener, si existen, todos los valores de α para los que f y S coinciden en todo el intervalo $(0,1)$; *ii)* analizar si para algún valor de α S converge uniformemente a f en $[0,1]$.

Resolución: La serie de Fourier de senos de f en $[0, 1]$ es $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\pi x)$, donde

$b_n = 2 \int_0^1 f(t) \text{sen}(n\pi t) dt$, por lo tanto es la serie de Fourier de la extensión 2-periódica

impar de f . Indiquemos con \tilde{f} esta extensión. Cualquiera sea el valor de α , \tilde{f} satisface las condiciones de Dirichlet en todos los puntos de la recta y por lo tanto para cada $x \in \mathbb{R}$ es $S(x) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x^-) + \tilde{f}(x^+)]$. En particular:

$$S(0) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(0^-) + \tilde{f}(0^+)] = \frac{1}{2}[-1 + 1] = 0$$

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)] = f(x) = \alpha x^2 + 1 \quad \text{si } 0 < x < \frac{1}{2}$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}^-\right) + f\left(\frac{1}{2}^+\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\alpha \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} + 2\right] = \frac{\alpha + 14}{8}$$

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)] = x + 2 \quad \text{si } \frac{1}{2} < x < 1$$

$$S(1) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(1^-) + \tilde{f}(1^+)] = \frac{1}{2}[3 - 3] = 0$$

(No era necesario verificar la anulación de $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\pi x)$ en $x = 0$ y en $x = 1 \dots$).

Entonces:

(i) $S(x) = f(x)$ para todo $x \in (0,1)$ sii $\frac{\alpha + 14}{8} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$, es decir, sii $\alpha = 6$.

(ii) Si la serie S fuera uniformemente convergente en $[0,1]$, sería uniformemente convergente a \tilde{f} en $[-1,1]$. Pero esto es absurdo, pues el límite uniforme de funciones continuas es continua y \tilde{f} no lo es. Por lo tanto, no existe valor de α para el cual S sea uniformemente convergente en $[0,1]$.

(Se recomienda hacer algún gráfico de f y de \tilde{f})

3) Describir un problema físico modelable mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (1) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ (2) u(0, t) = 10 & , \quad t \geq 0 \\ (3) u(\pi, t) = 15 & , \quad t \geq 0 \\ (4) u(x, 0) = h(x) & , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Resolverlo, introduciendo las hipótesis necesarias sobre h .

Resolución: Se trata del modelo clásico de difusión del calor en una varilla de longitud finita con extremos a temperatura constante. Podemos simplificar el problema definiendo la función

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{5}{\pi}x - 10$$

y planteando el problema “más homogéneo”:

$$\begin{cases} (1)' \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ (2)' v(0, t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ (3)' v(\pi, t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ (4)' v(x, 0) = h(x) - \frac{5}{\pi}x - 10 & , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Para cualquier sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales convergente a 0 y para cualquier $t > 0$, la serie

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) e^{-n^2 t}$$

es maravillosamente convergente y verifica las condiciones (1)', (2)' y (3)'. Respecto de la última, la (4)', debe verificarse la igualdad

$$h(x) - \frac{5}{\pi}x - 10 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) \quad (*)$$

para todo $x \in [0, \pi]$. Para esto, es necesario que los coeficientes $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ de la serie sean los coeficientes de Fourier de la extensión 2π – periódica impar \tilde{f} de la función $f(x) = h(x) - \frac{5}{\pi}x - 10$, $0 \leq x \leq \pi$, y en este caso, para que valga la igualdad (*) en todos los puntos de $[0, \pi]$ f debe satisfacer las condiciones de Dirichlet y tomar el valor promedio de los saltos en los puntos de discontinuidad (éstas son las condiciones para h).

Es decir: con estas condiciones y con los coeficientes

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\tilde{f}(\theta) \text{sen}(n\theta)}^{\text{par}} d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{f}(\theta) \text{sen}(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[h(\theta) - \frac{5}{\pi} \theta - 10 \right] \text{sen}(n\theta) d\theta$$

obtenemos la solución:

$$u(x,t) = \frac{5x}{\pi} + 10 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(nx) e^{-n^2 t}$$

4) Determinar si existe una función $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathfrak{R}$ tal que

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = \begin{cases} 1 - e^{-(\omega^2 - 4)} & \text{si } |\omega| < 2 \\ 0 & \text{si } |\omega| \geq 2 \end{cases}$$

y obtener $\int_0^{+\infty} u(x,t) \cos(\omega x) dx$ sabiendo que

$$\begin{cases} (1) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < +\infty, t > 0 \\ (2) u(x,0) = f(x) & , \quad x \geq 0 \\ (3) \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Resolución: Este ejercicio puede resolverse mediante la transformación de Fourier o bien mediante la transformación de Fourier-coseno. En esta resolución elegimos la primera.

La función $h : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ tal que $h(\omega) = \begin{cases} 1 - e^{-(\omega^2 - 4)} & \text{si } |\omega| < 2 \\ 0 & \text{si } |\omega| \geq 2 \end{cases}$ es par (y además, es

continua y absolutamente integrable en la recta). Por lo tanto si existe una función $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathfrak{R}$ que verifica las condiciones del enunciado, considerando su extensión par $\tilde{f} : (-\infty, +\infty) \longrightarrow \mathfrak{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} h(\omega) &= \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x) \cos(\omega x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x) \cos(\omega x) dx - \underbrace{\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x) \text{sen}(\omega x) dx}_{=0} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x) e^{-i\omega x} dx \end{aligned}$$

Es decir: $2h$ es la transformada de Fourier de \tilde{f} , por lo tanto, para encontrar una f que verifique las condiciones del enunciado, podemos intentar con el Teorema de Inversión:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= \frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} 2h(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^{+2} [1 - e^{-(\omega^2-4)}] e^{i\omega x} d\omega = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-2}^{+2} e^{i\omega x} d\omega - \frac{e^4}{\pi} \int_{-2}^{+2} e^{-\omega^2} e^{i\omega x} d\omega = \frac{2 \operatorname{sen}(2x)}{\pi x} - \frac{e^4}{\pi} \int_{-2}^{+2} e^{-\omega^2} e^{i\omega x} d\omega = \\
&= \frac{2 \operatorname{sen}(2x)}{\pi x} - \frac{e^4}{\pi} \left[\int_{-2}^{+2} e^{-\omega^2} \cos(\omega x) d\omega + i \overbrace{\int_{-2}^{+2} e^{-\omega^2} \operatorname{sen}(\omega x) d\omega}^{=0} \right] \\
&= \frac{2 \operatorname{sen}(2x)}{\pi x} - \frac{e^4}{\pi} \int_{-2}^{+2} e^{-\omega^2} \cos(\omega x) d\omega
\end{aligned}$$

Esta función es, efectivamente, una función par que toma valores reales. Por lo tanto, una de las funciones posibles que verifican las condiciones del enunciado es

$$f(x) = \frac{2 \operatorname{sen}(2x)}{\pi x} - \frac{e^4}{\pi} \int_{-2}^{+2} e^{-\omega^2} \cos(\omega x) d\omega, \quad x \geq 0$$

Observación: Nos falta probar, en realidad, la convergencia de la integral

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x) \cos(\omega x) dx}{x} - \frac{e^4}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-2}^{+2} e^{-\theta^2} \cos(\theta x) d\theta \right] \cos(\omega x) dx$$

para cada $\omega \in \mathfrak{R}$. Para esta comprobación puede aplicarse el Teorema de Inversión a la función h , que verifica las condiciones de Dirichlet y cuya transformada de Fourier es $2\pi \tilde{f}$ (tener presente que \tilde{f} es par). Con este razonamiento logramos garantizar la

convergencia de $\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) \cos(\omega t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) e^{i\omega t} dt$ en valor principal; pero esto implica,

precisamente, la convergencia de $\int_0^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = \frac{1}{2} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) \cos(\omega t) dt$. (Fin de la

observación)

Desde luego, esta f no es la única que satisface las condiciones requeridas: cualquier otra función $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ que difiera de f en una cantidad finita de puntos, por ejemplo,

$$\text{verifica } \int_0^{+\infty} g(x) \cos(\omega x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx.$$

Finalmente, para calcular $\int_0^{+\infty} u(x, t) \cos(\omega x) dx$, podemos considerar la extensión par

$$v : (-\infty, +\infty) \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathfrak{R}$$

de u respecto de la variable x (es decir: $v(-x, t) = v(x, t) = u(x, t)$ para todo $x \geq 0$ y todo $t \geq 0$). Asumiendo que v es de clase C^1 (vamos a asumir mucho más), resulta que $\frac{\partial v}{\partial x}$ es

impar (respecto de x) y por lo tanto $\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = 0$ para todo $t \geq 0$ (es decir: la condición

(3) ya se verifica). Ahora, el resto es clásico y muy conocido. Lo expondremos brevemente, sin explicitar las justificaciones necesarias. Aplicando la transformación de

Fourier en $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t}$ (respecto de la primera variable) obtenemos la ecuación

$-\omega^2 \hat{v}(\omega, t) = \frac{\partial \hat{v}(\omega, t)}{\partial t}$, de donde se deduce que $\hat{v}(\omega, t) = k(\omega)e^{-\omega^2 t}$ para alguna función

k . Recuperamos v mediante el Teorema de Inversión:

$$v(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(\omega) e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega$$

Para $t = 0$: $v(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \tilde{f}(x)$ (= extensión par de f). Por lo tanto, k es la

transformada de Fourier de \tilde{f} , es decir: la función $2h$, como hemos visto anteriormente.

Por lo tanto:

$$\hat{v}(\omega, t) = k(\omega) e^{-\omega^2 t} = 2h(\omega) e^{-\omega^2 t}$$

y obtenemos, finalmente:

$$\begin{aligned} 2h(\omega) e^{-\omega^2 t} = \hat{v}(\omega, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, t) e^{-i\omega x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{v(x, t) \cos(\omega x)}^{\text{par}} dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{v(x, t) \operatorname{sen}(\omega x)}^{\text{impar}} dx = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} v(x, t) \cos(\omega x) dx = 2 \int_0^{+\infty} u(x, t) \cos(\omega x) dx = \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{+\infty} u(x, t) \cos(\omega x) dx = h(\omega) e^{-\omega^2 t} = \begin{cases} [1 - e^{-(\omega^2 - 4)t}] e^{-\omega^2 t} & \text{si } |\omega| < 2 \\ 0 & \text{si } |\omega| \geq 2 \end{cases}$$

5) Estudiar para qué valores de s es válida siguiente igualdad:

$$\mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f_n\right)(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mathcal{L}(f_n)(s) \quad (*)$$

donde para cada $n \geq 0$ y cada $t \in \mathfrak{R}$: $f_n(t) = t^n H(t)$, siendo H la función de Heaviside.

Resolución: Para cada $t \geq 0$ es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n = e^{-t}$, (y es 0 para cada $t <$

0) por lo tanto: $\mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f_n\right)(s) = \frac{1}{s+1}$, con abscisa de convergencia -1. Por otra

parte, para cada $n \geq 0$, $\mathcal{L}(f_n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, con abscisa de convergencia 0. Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mathcal{L}(f_n)(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{s}\right)^n \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{s} \frac{1}{1 + \frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1}$$

donde la igualdad (**) es válida sii $|s| > 1$ (se trata de una serie geométrica). Por lo tanto, las condiciones de la validez de la igualdad (lo que incluye la existencia de ambos miembros) son $\operatorname{Re}(s) > 0$ y $|s| > 1$ (la primera implica $\operatorname{Re}(s) > -1$, condición de existencia del miembro izquierdo de (*)).
